Vincent Beck

Enveloppe vectorielle
ou
Transformer de l'affine en du vectoriel

0 Mode d'emploi.

Cette note propose la construction de l'enveloppe vectorielle d'un espace affine. L'enveloppe vectorielle plonge l'espace affine en question dans un espace vectoriel plus grand de façon à ce qu'il en soit un hyperplan affine. De cette façon, les calculs affines peuvent être remplacés par des calculs vectoriels (donc plus simples). Par exemple, dans l'enveloppe vectorielle, l'écriture $2\mathrm{A} + 3\mathrm{B} - 7\mathrm{C}$ (pour $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ trois points de l'espace affine) aura un sens (voir la remarque 11).

Cette note est aussi l'occasion de mettre en avant les propriétés systématiques des propriétés universelles qui sont finalement assez nombreuses au programme de l'agrégation : propriété universelle du quotient, propriété universelle des polynômes... (voir les exercices 1, 2 et 4, l'application 5, corollaire 15). En effet, dans cette note, on définit deux objets à partir de leur propriété universelle : les combinaisons linéaires formelles et l'enveloppe vectorielle.

La note se décompose en trois parties. La première étudie la notion de combinaison linéaire formelle qui est la base pour la construction de l'enveloppe vectorielle. La deuxième partie donne la construction de cette enveloppe vectorielle et ses propriétés fonctorielles. Pour d'autres constructions de l'enveloppe vectorielle, on pourra consulter [BER, 3.1], [FRE, 3.1] ou [TIS, Thème 2]. La troisième partie étudie les premières propriétés de l'enveloppe vectorielle et notamment son lien avec les objets de la première feuille d'exercice. Pour de nombreuses illustrations du calcul barycentrique et de l'enveloppe vectorielle, on consultera [EID] ou [TIS, Thème 1].

D'un point de vue géométrique, les exercices à ne pas manquer sont les exercices d'application 5 à 8. Pour ceux qui préfèrent insister sur les propriétés universelles, on fera les exercices 1, 2 et 4.

I Combinaison linéaire formelle.

Cette première partie est consacrée à l'étude des combinaisons linéaires formelles : il s'agit d'associer à un ensemble (noté ici X) un espace vectoriel de façon « satisfaisante » (ici X sera une base de l'espace vectoriel construit). En fait, plutôt que de demander que X soit une base de l'espace vectoriel construit, on demande que l'espace vectoriel construit vérifie une propriété universelle. Le fait que X soit une base de l'espace construit sera alors une conséquence de la construction (voir la remarque 6). Cela peut sembler très abstrait de demander la vérification une propriété universelle mais c'est en fait extrêmement utile en pratique pour pouvoir créer des applications linéaires.

L'espace construit s'appelle l'espace des « combinaisons linéaires formelles ». C'est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de X dans k : le sous-espace des fonctions qui s'annulent sauf en un nombre fini de points.

Dans cette partie, on commence par rappeler quelques notations avant de donner la définition de l'ensemble des combinaisons linéaires formelles puis on étudie les conséquences de la propriété universelle.

Notation 1 – Applications à valeurs dans un corps. Soient k un corps et X un ensemble. On note k^{X} l'espace vectoriel des applications de X dans k (en fait c'est même une k-algèbre mais, dans cette note, on ne va pas se servir de la structure multiplicative). On rappelle que l'addition des éléments f et g de k^{X} et la multiplication de f par le scalaire $\lambda \in k$ sont définies par

$$(f+g) : x \longmapsto f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad \lambda f : x \longmapsto \lambda f(x)\,.$$

Pour $f \in k^{\mathrm{X}}$, on définit le *support de* f et on note

$$\mathrm{Supp}(f) = \{x \in \mathrm{X}, \qquad f(x) \neq 0\}\,.$$

Attention, la notion de support définie ici n'est pas la même que celle du support d'une fonction continue à support compact : notre objectif est purement algébrique, et nous ne prenons donc pas en compte de topologie.

Pour $x \in \mathrm{X}$, on définit l'application δ_x qui vaut 0 partout sauf en x où elle vaut 1 c'est-à-dire

$$\delta_x(y) = 0 \quad \text{si} \quad y \neq x \qquad \text{et} \qquad \delta_x(x) = 1$$

ou encore $\delta_x(y) = \delta_{x,y}$ pour tout $y \in \mathrm{X}$.

Proposition 2 – Combinaison linéaire formelle. On désigne par $k^{(\mathrm{X})}$ l'ensemble des applications de X dans k dont le support est un ensemble fini. C'est un sous-espace vectoriel de k^{X}. La famille $(\delta_x)_{x\in\mathrm{X}}$ forme une base de $k^{(\mathrm{X})}$. En particulier, l'application

$$\delta_{\mathrm{X}}\colon \begin{cases} \mathrm{X} \longrightarrow k^{(\mathrm{X})} \\ x \longmapsto \delta_x \end{cases}$$

est injective.

Propriété universelle. Par ailleurs, pour tout k-espace vectoriel M et toute application $u : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$, il existe une unique application linéaire $\widetilde{u} : k^{(\mathrm{X})} \to \mathrm{M}$ telle que $\widetilde{u} \circ \delta_{\mathrm{X}} = u$ c'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{u} & \mathrm{M} \\ {\scriptstyle \delta_{\mathrm{X}}}\downarrow & \nearrow_{\widetilde{u}} & \\ k^{(\mathrm{X})} & & \end{array}$$

De plus, on dispose d'une expression explicite de l'application $\widetilde{u}$: elle est donnée par

$$\widetilde{u}\colon \begin{cases} k^{(\mathrm{X})} \longrightarrow \mathrm{M} \\ \sum\limits_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x \delta_x \longmapsto \sum\limits_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x u(x) \end{cases}$$

où l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ tels que λ_x est non nul est fini.

Preuve. L'ensemble $k^{(\mathrm{X})}$ est un sous-espace vectoriel de k^{X}. En effet, pour $f, g \in k^{\mathrm{X}}$ et $\lambda \in k$, on a

$$\mathrm{Supp}(0) = \varnothing, \qquad \mathrm{Supp}(f+g) \subset \mathrm{Supp}(f) \cup \mathrm{Supp}(g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Supp}(\lambda f) \subset \mathrm{Supp}(f)\,.$$

Montrons que la famille $(\delta_x)_{x\in\mathrm{X}}$ est une famille libre. Supposons qu'on ait une combinaison linéaire

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i} = 0 \qquad \text{avec} \qquad x_i \neq x_j \ \text{ si } \ i \neq j\,.$$

En évaluant la relation précédente en x_j, on obtient $\lambda_j = 0$.

Montrons que la famille $(\delta_x)_{x\in\mathrm{X}}$ engendre $k^{(\mathrm{X})}$. Soit $f \in k^{(\mathrm{X})}$; on note $\mathrm{Supp}(f) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ (avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$). Par construction, l'application

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\delta_{x_i}$$

coïncide avec f sur $\mathrm{Supp}(f)$ et est nulle en dehors du support de f. Elle est donc égale à f.

Comme la famille $(\delta_x)_{x\in\mathrm{X}}$ est une base de $k^{(\mathrm{X})}$, il existe une unique application linéaire $\widetilde{u}$ de $k^{(\mathrm{X})}$ dans M telle que $\widetilde{u}(\delta_x) = u(x)$ c'est-à-dire telle que $\widetilde{u} \circ \delta_{\mathrm{X}} = u$. L'expression de $\widetilde{u}$ résulte alors immédiatement de la formule donnant une application linéaire lorsqu'on connaît l'image de la base. ∎

Remarque 3 – Commentaires. L'application injective δ_{X} permet d'identifier X à un sous-ensemble de $k^{(\mathrm{X})}$ c'est-à-dire que, pour simplifier, l'élément δ_x est noté x. Avec cette convention, un élément de $k^{(\mathrm{X})}$ va avoir une écriture sous la forme

$$\sum_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x x \qquad (*)$$

où l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ tel que λ_x est non nul est fini. De plus, on a unicité de cette écriture : l'égalité

$$\sum_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x x = \sum_{x\in\mathrm{X}} \mu_x x$$

est synonyme de $\lambda_x = \mu_x$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. Ceci justifie le nom donné à l'ensemble $k^{(\mathrm{X})}$ de *l'ensemble des combinaisons linéaires formelles d'éléments de* X (le « combinaison linéaire » s'attachant bien sûr à la représentation sous la forme $(*)$ et le « formelle » s'attachant à la propriété d'unicité de l'écriture).

L'application u de la deuxième partie de la proposition est une application quelconque (en particulier, elle n'est pas forcément linéaire puisque X n'est pas en général un espace vectoriel). Ainsi, on a construit à partir de X un espace vectoriel « de base X » et on peut alors transformer les applications qui partent de X et arrivent dans un espace vectoriel en applications linéaires (qui partent de $k^{(\mathrm{X})}$) : on a linéarisé la situation.

Enfin, revenons sur la deuxième partie de la proposition 2 : la propriété universelle. On note $\mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{M})$ l'ensemble des fonctions de X dans M. La propriété universelle démontrée peut aussi s'énoncer de cette façon : pour tout k-espace vectoriel M, l'application

$$\begin{cases} \mathscr{L}(k^{(\mathrm{X})}, \mathrm{M}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathrm{X}, \mathrm{M}) \\ \qquad \varphi \qquad\quad \longmapsto \varphi \circ \delta_{\mathrm{X}} \end{cases}$$

est une bijection. De manière heuristique, cette propriété s'énonce de la façon suivante : « se donner une application de X dans M revient à se donner une application linéaire de $k^{(\mathrm{X})}$ dans M. » ∎

Exercice 1 — Propriété universelle. Pour les propriétés universelles que vous connaissez : propriété universelle du quotient, propriété universelle des polynômes, propriété universelle de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, etc. Donner un énoncé précis en terme de bijections comme ci-dessus puis un « énoncé heuristique ».

Exemple 4 — Polynôme. L'ensemble des polynômes (à une indéterminée) à coefficients dans k est construit de cette façon : il s'agit de l'ensemble $k^{(\mathbb{N})}$. Simplement plutôt que de noter n ou encore δ_n l'image de $n \in \mathbb{N}$ dans $k^{(\mathbb{N})}$, on la note X^n. La première notation est bannie car elle prêterait trop à confusion : comment distinguer entre $2\lambda = \lambda + \lambda$ et $\lambda 2 = \lambda\delta_2$? Par ailleurs, on privilégie la notation X^n à la notation δ_n pour tenir compte du fait que, sur $\mathbb{N}$, il y a une addition. C'est cette addition qui permet de définir le produit de deux polynômes en posant $\mathrm{X}^n\mathrm{X}^m := \mathrm{X}^{n+m}$ (ce qui est plus habituel que la notation $\delta_n\delta_m = \delta_{n+m}$).

La situation est la même pour l'ensemble des polynômes à r indéterminées : $k[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_r] = k^{(\mathbb{N}^r)}$. On utilise la notation ${\mathrm{X}_1}^{i_1} \cdots {\mathrm{X}_r}^{i_r}$ plutôt que $\delta_{i_1,\ldots,i_r}$.

Dans le problème de mathématiques générales d'agrégation externe de 1992 (Partie I.C), on trouvera un autre exemple d'utilisation de la notion de combinaisons linéaires formelles en lien avec les groupes finis. ∎

Application 5 — Fonctorialité. Considérons à présent deux ensembles X et Y et $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ une application. On introduit alors les notations

$$\delta_{\mathrm{X}} : \begin{cases} \mathrm{X} \longrightarrow k^{(\mathrm{X})} \\ x \longmapsto \delta_x \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \delta_{\mathrm{Y}} : \begin{cases} \mathrm{Y} \longrightarrow k^{(\mathrm{Y})} \\ y \longmapsto \delta_y \end{cases}$$

Montrons que l'application f « s'étend » de façon unique en une application linéaire de $k^{(\mathrm{X})}$ dans $k^{(\mathrm{Y})}$. De façon précise, on va montrer qu'il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : k^{(\mathrm{X})} \to k^{(\mathrm{Y})}$ vérifiant $\widetilde{f} \circ \delta_{\mathrm{X}} = \delta_{\mathrm{Y}} \circ f$. C'est, en fait, une conséquence immédiate de la propriété universelle (proposition 2) qu'il suffit d'appliquer à l'application $\delta_{\mathrm{Y}} \circ f : \mathrm{X} \to k^{(\mathrm{Y})}$ qui est bien à valeurs dans un espace vectoriel : $k^{(\mathrm{Y})}$.

En terme de diagramme, on a les données suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{\ f\ } & \mathrm{Y} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathrm{X}}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathrm{Y}}} \\ k^{(\mathrm{X})} & & k^{(\mathrm{Y})} \end{array}$$

et on a complété le diagramme en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \xrightarrow{\ f\ } & \mathrm{Y} \\ {\scriptstyle \delta_{\mathrm{X}}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_{\mathrm{Y}}} \\ k^{(\mathrm{X})} & \dashrightarrow & k^{(\mathrm{Y})} \end{array}$$

où $\widetilde{f}$ est linéaire.

Où on explique le « étend ». Lorsqu'on identifie δ_x à x et donc X à un sous-ensemble de $k^{(\mathrm{X})}$ et de même avec Y (voir la remarque 3), l'égalité $\widetilde{f} \circ \delta_{\mathrm{X}} = \delta_{\mathrm{Y}} \circ f$ se réécrit $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ et on comprend alors pourquoi on dit « étendre f » : on définit une application $\widetilde{f}$ sur tout $k^{(\mathrm{X})}$ qui coïncide avec f sur $\mathrm{X} \subset k^{(\mathrm{X})}$.

Enfin, la propriété universelle donne aussi l'expression explicite pour $\widetilde{f}$ qui est

$$\widetilde{f} : \begin{cases} k^{(\mathrm{X})} \longrightarrow k^{(\mathrm{Y})} \\ \displaystyle\sum_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x \delta_x \longmapsto \sum_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x \delta_{f(x)} \end{cases}$$

où l'ensemble des $x \in \mathrm{X}$ tel que λ_x est non nul est fini. En utilisant les conventions de la remarque 3, $\widetilde{f}$ se réécrit

$$\widetilde{f} : \begin{cases} k^{(\mathrm{X})} \longrightarrow k^{(\mathrm{Y})} \\ \displaystyle\sum_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x x \longmapsto \sum_{x\in\mathrm{X}} \lambda_x f(x)\,. \end{cases}$$

Exercice 2 — Fonctorialité (suite). On reprend les notations de l'application 5. On considère Z un ensemble et $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ une application.

a) Calculer $\widetilde{g \circ f}$ (soit en utilisant l'unicité dans la propriété universelle, soit en utilisant la formule explicite).

b) Calculer $\widetilde{\mathrm{id}_\mathrm{X}}$.

c) En déduire que f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\widetilde{f}$ l'est aussi (soit en remarquant que pour une application injective (resp. surjective), il existe $f' : \mathrm{Y} \to \mathrm{X}$ telle que $f'f = \mathrm{id}_\mathrm{X}$ (resp. $ff' = \mathrm{id}_\mathrm{Y}$), soit en utilisant la formule explicite).

d) Soient X un ensemble et (E, d) un couple formé d'un k-espace vectoriel E et d'une application $d : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$. On suppose que (E, d) vérifie la propriété (universelle) suivante : pour toute application $f : \mathrm{X} \to \mathrm{M}$ où M est un k-espace vectoriel, il existe une unique application linéaire $g : \mathrm{E} \to \mathrm{M}$ telle que $g \circ d = f$. Montrer qu'il existe un unique isomorphisme linéaire $\varphi : k^{(\mathrm{X})} \to \mathrm{E}$ tel que $\varphi \circ \delta_\mathrm{X} = d$ (autrement dit, le couple $(k^{(\mathrm{X})}, \delta_\mathrm{X})$ est unique à unique isomorphisme près). En déduire que d est nécessairement injective et que la famille $(d(x))_{x \in \mathrm{X}}$ est une base de E.

e) Soient X un ensemble, E un k-espace vectoriel et $f : k^{(\mathrm{X})} \to \mathrm{E}$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Montrer que le couple $(\mathrm{E}, f \circ \delta_\mathrm{X})$ vérifie la propriété universelle de la question **d** et que f est le morphisme φ de la question **d**.

f) *Caractérisation intrinsèque des couples vérifiant la propriété universelle.* Soient X un ensemble et E un k-espace vectoriel. On suppose que E admet une base indexée par X. Déterminer $d : \mathrm{X} \to \mathrm{E}$ telle que (E, d) vérifie la propriété universelle.

Remarque 6 — Données supplémentaires. L'objectif premier de la notion de combinaisons linéaires formelles est de construire un espace vectoriel vérifiant la propriété universelle. Lorsqu'on construit cet espace vectoriel, on obtient des propriétés supplémentaires qui résultent de la construction et non pas de la propriété universelle : ici le fait que l'application δ est injective et que l'espace vectoriel admet une base indexée par X. Ce phénomène est général lors des constructions d'objets par propriétés universelles. Pour plus de détails sur le sujet, on pourra consulter

http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/propuniv.pdf ■

Remarque 7 — Où on ne doit pas être étonné que l'espace construit admet une base indexée par X. Heuristiquement, un espace vectoriel vérifiant la propriété universelle doit contenir X de façon libre pour assurer l'existence de l'application linéaire $\widetilde{u}$. En effet, pour pouvoir construire une application linéaire qui prend les valeurs qu'on veut sur certains vecteurs, ces vecteurs doivent être libre. Maintenant pour obtenir l'unicité de l'application $\widetilde{u}$, il faut que X engendre l'espace en question. Ainsi X doit en être une base. ■

II Enveloppe vectorielle.

Cette partie est divisée en quatre sous-parties. La première sous-partie fait quelques rappels de géométrie affine. La deuxième sous-partie donne la construction de l'enveloppe vectorielle. Dans la troisième sous-partie, on prend le temps de revenir sur la forme des éléments de l'enveloppe vectorielle. Enfin dans la quatrième sous-partie, on étudie les conséquences de la propriété universelle.

1) Rappel de la première feuille.

Avant de s'attaquer à la construction de l'enveloppe vectorielle, on rappelle quelques propriétés des espaces affines vues sur la première feuille d'exercice.

Remarque 8 — Rappel de géométrie affine. Soit E un espace vectoriel muni de sa structure canonique d'espace affine. On considère $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille de points pondérés de E qui admet un barycentre (c'est-à-dire que le nombre de λ_i non nuls est fini et la somme des λ_i est non nulle). Le barycentre G de la famille $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est donné par

$$\mathrm{G} = \Big(\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i\Big)^{-1} \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i \,.$$

En effet, en notant O l'origine de E, on a

$$\mathrm{G} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \Big(\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i\Big)^{-1} \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \overrightarrow{\mathrm{OA}_i} = \Big(\sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i\Big)^{-1} \sum_{i \in \mathrm{I}} \lambda_i \mathrm{A}_i \,.$$

Voir la question **b** de l'exercice 5 de la première feuille.

Par ailleurs, soient $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ deux espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Alors f est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si $\overrightarrow{f}$ l'est (voir la remarque 26 de la première feuille).

Injectivité. Supposons $\overrightarrow{f}$ injective. Si $f(\mathrm{A}) = f(\mathrm{M})$ alors $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = 0$ et donc $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$ et $\mathrm{A} = \mathrm{M}$.

Réciproquement, on suppose f injective. Soient $x, y \in \mathrm{E}$ tels que $\overrightarrow{f}(x) = \overrightarrow{f}(y)$. On fixe $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et on pose $\mathrm{B} = \mathrm{A} + x$ et $\mathrm{C} = \mathrm{A} + y$. Ainsi $f(\mathrm{B}) = f(\mathrm{C})$ puis $\mathrm{B} = \mathrm{C}$ et donc $x = y$.

Surjectivité. Supposons $\overrightarrow{f}$ surjective. On fixe $\mathrm{B} = f(\mathrm{A}) \in f(\mathscr{E})$. Pour $\mathrm{C} \in \mathscr{F}$, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\overrightarrow{f}(x) = \overrightarrow{\mathrm{BC}}$. On a alors $f(\mathrm{A} + x) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{f}(x) = \mathrm{C} \in f(\mathscr{E})$. Ainsi f est surjective.

Réciproquement, supposons f surjective. Soit $y \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{B} \in \mathscr{F}$. On peut écrire $\mathrm{B} = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C} = \mathrm{B} + y = f(\mathrm{A}')$. On a alors $y = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\mathrm{AA}'})$.

Ces résultats proviennent en fait directement de la relation $f(\mathrm{M}) = f(\mathrm{A}) + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ qui peut aussi s'écrire $f = \varphi_{f(\mathrm{A})} \circ \overrightarrow{f} \circ {\varphi_{\mathrm{A}}}^{-1}$ où φ_{A} et $\varphi_{f(\mathrm{A})}$ sont des bijections. ∎

2) Construction de l'enveloppe vectorielle.

L'objectif de la construction de l'enveloppe vectorielle est de vectorialiser l'affine pour le rendre plus facile. Dans la première feuille d'exercice (exercice 4 question **c**), on a vu qu'on pouvait par transfert de structure mettre une structure d'espace vectoriel sur l'espace affine. L'inconvénient de cette technique était que la structure obtenue n'était pas unique et dépendait du choix de l'origine (exercice 4 question **d** de la première feuille). La construction de l'enveloppe vectorielle d'un espace affine va contourner cette difficulté de la canonicité de la structure vectorielle sur un espace affine de la façon suivante : on ne va pas construire une structure d'espace vectoriel sur un espace affine (l'affine est et restera toujours de l'affine) mais on va construire un grand espace vectoriel $\widehat{\mathrm{E}}$ qui va contenir simultanément l'espace affine $\mathscr{E}$ et sa direction E de telle façon que $\mathscr{E}$ soit un hyperplan affine parallèle à l'hyperplan vectoriel E. En particulier, on pourra définir des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathscr{E}$ qui ne sera plus (forcément) un élément de $\mathscr{E}$ mais un élément de $\widehat{\mathrm{E}}$. Cette technique à l'avantage de simplifier de nombreux calculs en évitant le recours à une origine. La construction de l'enveloppe vectorielle présente aussi un intérêt pour la géométrie projective : elle permet de définir la complétion projective d'un espace affine (voir la feuille de géométrie projective).

La proposition suivante donne une construction de l'enveloppe vectorielle d'un espace affine. On en trouvera d'autres moins abstraites (mais où les vérifications sont bien plus fastidieuses) dans [BER, 3.1] et [FRE, III.1.1].

Proposition 9 – Enveloppe vectorielle. Soit $(\mathscr{E}, \mathrm{E})$ un k-espace affine. Il existe un k-espace vectoriel $\widehat{\mathrm{E}}$ et une application affine $i : \mathscr{E} \to \widehat{\mathrm{E}}$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout k-espace vectoriel F et toute application affine $f : \mathscr{E} \to \mathrm{F}$, il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : \widehat{\mathrm{E}} \to \mathrm{F}$ vérifiant $\widetilde{f} \circ i = f$.

Les applications $i : \mathscr{E} \to \widehat{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{i} : \mathrm{E} \to \widehat{\mathrm{E}}$ sont injectives. Elles permettent d'identifier $\mathscr{E}$ un sous-espace affine de $\widehat{\mathrm{E}}$ et E à un sous-espace vectoriel de $\widehat{\mathrm{E}}$.

De plus, il existe une (unique) forme linéaire $\lambda : \widehat{\mathrm{E}} \to k$ telle que $\lambda^{-1}(1) = i(\mathscr{E})$ et $\lambda^{-1}(0) = \operatorname{Ker}\lambda = \overrightarrow{i}(\mathrm{E})$. En particulier, E un hyperplan vectoriel de $\widehat{\mathrm{E}}$ et $\mathscr{E}$ est un hyperplan affine de $\widehat{\mathrm{E}}$ qui lui est parallèle.

Preuve. La méthode de construction de $\widehat{\mathrm{E}}$ est une méthode très classique pour la construction d'objets algébriques : on construit tout d'abord un objet immense (ici $k^{(\mathscr{E})}$) puis on quotiente par ce qu'il faut (ici U) pour obtenir les propriétés qu'on souhaite (la partie III du sujet de mathématiques générales de l'agrégation externe 1992 propose une autre construction de ce genre, la construction du produit tensoriel en donne encore une autre).

Précisons la démarche dans le cas qui nous intéresse ici. On veut construire un espace vectoriel qui contient $\mathscr{E}$ comme sous-espace affine. On commence par construire un espace vectoriel qui contient $\mathscr{E}$. On a vu, dans la première partie de cette note, qu'on savait le faire : on prend $k^{(\mathscr{E})}$. Le problème est que l'inclusion de $\mathscr{E}$ dans $k^{(\mathscr{E})}$ n'est pas du tout affine. On va donc quotienter par « le bon » sous-espace vectoriel pour rendre l'application affine. On utilise pour cela la caractérisation des applications affines par la conservation du barycentre.

D'après la remarque 8, le barycentre G des points massiques $(\mathrm{A}_i, \lambda_i) = (\delta_{\mathrm{A}_i}, \lambda_i)$ est donné dans $k^{(\mathscr{E})}$ par

$$\frac{1}{\sum_i \lambda_i} \sum_i \lambda_i \mathrm{A}_i \,.$$

Pour obtenir une application qui conserve le barycentre, il faut donc que les éléments

$$\sum_i \lambda_i \mathrm{G} \qquad \text{et} \qquad \sum_i \lambda_i \mathrm{A}_i$$

qui sont distincts dans $k^{(\mathscr{E})}$ deviennent égaux. On quotiente donc $k^{(\mathscr{E})}$ pour rendre ces éléments égaux : c'est le sens du sous-espace vectoriel U ci-dessous.

Passons maintenant aux choses sérieuses et à la construction en elle-même. Dans l'espace $k^{(\mathscr{E})}$, on considère le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{U} = \Big\langle \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\Big)\delta_{\mathrm{G}} - \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\delta_{\mathrm{A}_i},\quad \mathrm{G}\text{ barycentre de la famille }(\mathrm{A}_i,\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}\Big\rangle_{\mathrm{ev}}\,.$$

On pose $\widehat{\mathrm{E}} = k^{(\mathscr{E})}/\mathrm{U}$ l'espace vectoriel quotient, $\pi : k^{(\mathscr{E})} \to \widehat{\mathrm{E}}$ la surjection canonique et $i = \pi\circ\delta_{\mathscr{E}} : \mathscr{E}\to\widehat{\mathrm{E}}$.

On a défini $\widehat{\mathrm{E}}$ et i. Il s'agit maintenant de vérifier qu'ils ont les propriétés souhaitées. On commence par vérifier que i est affine en montrant qu'elle conserve les barycentres. Supposons que G soit le barycentre de la famille $(\mathrm{A}_i,\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Par construction de $\widehat{\mathrm{E}}$, on a

$$\pi\Big(\Big(\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\Big)\delta_{\mathrm{G}} - \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\delta_{\mathrm{A}_i}\Big) = 0$$

La linéarité de π (c'est la surjection canonique d'un espace vectoriel sur son quotient) donne alors

$$i(\mathrm{G}) = \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\Big)^{-1}\ \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i i(\mathrm{A}_i)$$

c'est-à-dire (puisqu'on est dans l'espace vectoriel $\widehat{\mathrm{E}}$) que $i(\mathrm{G})$ est le barycentre de la famille $(i(\mathrm{A}_i),\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$ (voir la remarque 8). Ainsi i conserve bien le barycentre.

Démontrons à présent la propriété universelle. Soient F un k-espace vectoriel et $f : \mathscr{E}\to\mathrm{F}$ une application affine. D'après la proposition 2, il existe une (unique) application linéaire $\alpha : k^{(\mathscr{E})}\to\mathrm{F}$ telle que $\alpha\circ\delta_{\mathscr{E}} = f$. Le fait que f soit affine va permettre de faire passer α au quotient par U. Pour cela, il suffit de montrer que $\alpha(\mathrm{U}) = 0$. Supposons donc que G soit le barycentre de la famille $(\mathrm{A}_i,\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Comme f est affine, $f(\mathrm{G})$ est le barycentre de la famille $(f(\mathrm{A}_i),\lambda_i)_{i\in\mathrm{I}}$, on a donc (puisqu'on est dans l'espace vectoriel F)

$$f(\mathrm{G}) = \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\Big)^{-1}\ \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i f(\mathrm{A}_i)$$

Comme $f = \alpha\circ\delta_{\mathscr{E}}$, l'égalité précédente se réécrit, par linéarité de α,

$$\alpha\Big(\Big(\sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\Big)\delta_{\mathrm{G}} - \sum_{i\in\mathrm{I}}\lambda_i\delta_{\mathrm{A}_i}\Big) = 0\,.$$

Autrement dit, α est nulle sur tous les générateurs de U et donc sur U. On en déduit que α passe au quotient par U et définit une application linéaire $\widetilde{f} : \widehat{\mathrm{E}}\to\mathrm{F}$ telle que $\widetilde{f}\circ\pi = \alpha$. On a donc $\widetilde{f}\circ i = \widetilde{f}\circ\pi\circ\delta_{\mathscr{E}} = \alpha\circ\delta_{\mathscr{E}} = f$.

L'unicité de l'application linéaire $\widetilde{f}$ vérifiant $\widetilde{f}\circ i = f$ résulte du fait que $i(\mathscr{E})$ est une partie génératrice de l'espace vectoriel $\widehat{\mathrm{E}}$. En effet, $\delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})$ est une partie génératrice (même une base) de $k^{(\mathscr{E})}$ et donc $\pi(\delta_{\mathscr{E}}(\mathscr{E})) = i(\mathscr{E})$ est une partie génératrice de $k^{(\mathscr{E})}/\mathrm{U} = \widehat{\mathrm{E}}$.

Montrons que i est injective. Pour montrer l'injectivité de i, on va utiliser le raisonnement abstrait suivant. On commence par vérifier que l'injectivité de i est équivalente à l'existence d'un espace vectoriel F et d'une application affine injective $f : \mathscr{E}\to\mathrm{F}$. En effet, si i est injective, le couple $(\widehat{\mathrm{E}}, i)$ convient. Réciproquement, s'il existe un espace vectoriel F et une application affine injective $f : \mathscr{E}\to\mathrm{F}$, la propriété universelle permet d'écrire $\widetilde{f}\circ i = f$ et donne l'injectivité de i. On cherche donc un espace vectoriel F et une application affine injective $f : \mathscr{E}\to\mathrm{F}$. On choisit $\mathrm{A}\in\mathscr{E}$, $\mathrm{F} = \mathscr{E}_{\mathrm{A}}$ le vectorialisé de $\mathscr{E}$ en A et $f = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$. L'application f est évidemment injective. Vérifions qu'elle est affine. Pour $\mathrm{M}\in\mathscr{E}$, on a

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{M} = \mathrm{A} + \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \varphi_{\mathrm{A}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}}) = f(\mathrm{A}) + \varphi_{\mathrm{A}}(\overrightarrow{\mathrm{AM}})\,.$$

La dernière égalité vient du fait que dans $\mathscr{E}_{\mathrm{A}}$, $f(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ est l'élément neutre. Or, par définition de la structure d'espace vectoriel sur $\mathscr{E}_{\mathrm{A}}$, l'application φ_{A} est linéaire. Finalement f est bien affine (avec $\overrightarrow{f} = \varphi_{\mathrm{A}}$) et on obtient l'injectivité de i puis celle de $\overrightarrow{i}$, grâce à la remarque 8.

Passons à la définition et à la construction de λ. Maintenant qu'on dispose de la propriété universelle, cette construction est très facile : on considère l'application affine $f : \mathscr{E}\to k$ constante égale à 1. D'après la propriété universelle, il existe une unique forme linéaire $\lambda : \widehat{\mathrm{E}}\to k$ telle que $\lambda\circ i = f$. En particulier, on a $i(\mathscr{E})\subset\lambda^{-1}(1)$. Réciproquement, soit $x\in\widehat{\mathrm{E}}$ tel que $\lambda(x) = 1$. On peut écrire $x = \pi(y)$ avec $y\in k^{(\mathscr{E})}$ puis

$$y = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\delta_{\mathrm{A}_i}\qquad\text{avec}\qquad \mathrm{A}_i\in\mathscr{E}\,.$$

On a alors
$$x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i i(\mathrm{A}_i)\qquad\text{et}\qquad 1 = \lambda(x) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\lambda(i(\mathrm{A}_i)) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,.$$

On note alors $\mathrm{G}\in\mathscr{E}$ le barycentre de la famille $(\mathrm{A}_i,\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Comme i conserve le barycentre, on a

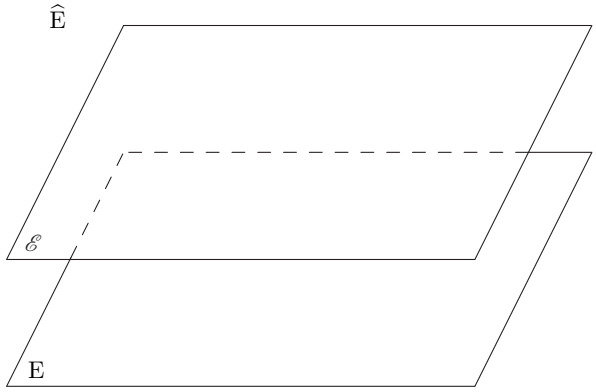
$$i(\mathrm{G}) = \Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big)i(\mathrm{G}) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i i(\mathrm{A}_i) = x\,.$$

On en déduit que $x\in i(\mathscr{E})$. Ainsi $i(\mathscr{E}) = \lambda^{-1}(1)$. Finalement $i(\mathscr{E})$ est un hyperplan affine de $\widehat{\mathrm{E}}$ dont la direction est $\overrightarrow{i}(\mathrm{E}) = \lambda^{-1}(0)$.

Pour finir, vérifions l'unicité de λ. Si $\alpha : \widehat{\mathrm{E}} \to k$ est une forme linéaire telle que $\alpha^{-1}(1) = i(\mathscr{E})$, alors $\alpha \circ i$ est l'application constante égale à 1 et donc, par unicité dans la propriété universelle, on a $\alpha = \lambda$. ■

Remarque 10 – Retour sur la construction. Revenons quelques instants sur le sens géométrique de la proposition 9. Fixons un espace affine $\mathscr{E}$. La proposition 9 propose la construction d'un espace vectoriel (l'espace $\widehat{\mathrm{E}}$) qui « contient » à la fois $\mathscr{E}$ et sa direction E et ceci de « façon agréable ». Plus précisément, l'injectivité de i et de $\overrightarrow{i}$ permet d'identifier $\mathscr{E}$ et E à leur image dans $\widehat{\mathrm{E}}$ qui sont respectivement un hyperplan affine et l'hyperplan vectoriel qui lui est parallèle.

Lorsque $\mathscr{E}$ est de dimension 2 (resp. 1), cela donne la représentation graphique suivante qu'il est **fondamental** d'avoir en mémoire lorsqu'on manipule l'enveloppe vectorielle. Cette situation sera aussi très utile pour la géométrie projective.



3) Manipulation de l'enveloppe vectorielle.

Dans cette sous-partie, on étudie la forme des éléments de $\widehat{\mathrm{E}}$: ce sont des combinaisons linéaires de points de $\mathscr{E}$. Ce sont les relations barycentriques de $\mathscr{E}$ qui donnent les identifications entre deux combinaisons linéaires. On donne aussi une formule explicite pour le calcul du $\widetilde{f}$ de la proposition 9.

Remarque 11 – Les éléments de $\widehat{\mathrm{E}}$. Qu'est-ce-qu'un élément de $\widehat{\mathrm{E}}$? Par construction, $\widehat{\mathrm{E}}$ est un quotient de $k^{(\mathscr{E})}$. Ainsi, un élément de $\widehat{\mathrm{E}}$ est l'image par π (la surjection canonique) d'un élément de $k^{(\mathscr{E})}$. On peut donc écrire $x \in \widehat{\mathrm{E}}$ sous la forme

$$x = \pi(y) \qquad \text{avec} \qquad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{\mathrm{A}_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$$

où la dernière expression utilise l'identification de $\mathscr{E}$ avec son image dans $k^{(\mathscr{E})}$ par δ.

Grâce à la linéarité de π, on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi(\delta_{\mathrm{A}_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i$$

où la dernière expression utilise l'identification de $\mathscr{E}$ avec son image dans $\widehat{\mathrm{E}}$ par $i = \pi \circ \delta$.

Ainsi, comme dans $k^{(\mathscr{E})}$, les éléments de $\widehat{\mathrm{E}}$ sont des combinaisons linéaires des points de $\mathscr{E}$. La différence avec l'espace des combinaisons linéaires formelles est qu'on n'a pas unicité de l'écriture (justement puisqu'on est passé au quotient) : dans $\widehat{\mathrm{E}}$, l'égalité

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \mathrm{A}_i \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{A}_i \neq \mathrm{A}_j \text{ si } i \neq j$$

n'implique pas $\lambda_i = \mu_i$.

En fait, quotienter par U permet précisément d'écrire que si G est le barycentre des points massiques $(\mathrm{A}_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ alors, dans $\widehat{\mathrm{E}}$, on a l'égalité

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \mathrm{G} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{A}_i \, .$$

Autrement dit, dans $\widehat{\mathrm{E}}$, on peut identifier différents éléments à l'aide de relations barycentriques. Par exemple, si D est le barycentre de $(\mathrm{A}, 2)$ et $(\mathrm{B}, 3)$, alors dans $\widehat{\mathrm{E}}$, on a $2\mathrm{A} + 3\mathrm{B} - 7\mathrm{C} = 5\mathrm{D} - 7\mathrm{C}$.

Exercice 3 – Deux vérifications qu'on n'écrit pas n'importe quoi. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E. Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$ et $x \in \mathrm{E}$, expliquer pourquoi l'élément $\mathrm{A} + x$ calculé dans $\mathscr{E}$ coïncide avec l'élément $\mathrm{A} + x$ calculé dans $\widehat{\mathrm{E}}$.

Justifier aussi pourquoi, l'élément $\Phi(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \in \mathrm{E}$ s'identifie à $\mathrm{B} - \mathrm{A} \in \widehat{\mathrm{E}}$.

Remarque 12 – Une expression explicite pour $\widetilde{f}$. Considérons $\mathscr{E}$ un espace affine, F un espace vectoriel et $f : \mathscr{E} \to \mathrm{F}$ une application affine. D'après la propriété universelle, il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : \widehat{\mathrm{E}} \to \mathrm{F}$ telle que $\widetilde{f} \circ i = f$. On va décrire explicitement $\widetilde{f}$ grâce à la construction qu'on en a donnée dans la preuve de la proposition 9 : l'application $\widetilde{f}$ est obtenue en la prolongeant d'abord à $k^{(\mathscr{E})}$ (grâce à la propriété universelle des combinaisons linéaires formelles) puis en passant au quotient. En reprenant les notations de la démonstration de la proposition 9, on construit $\alpha : k^{(\mathscr{E})} \to \mathrm{F}$ telle que

$$\alpha\left(\sum_{x\in \mathrm{X}} \lambda_x \delta_x\right) = \sum_{x\in \mathrm{X}} \lambda_x f(x)$$

où l'ensemble des x tels que $\lambda_x \neq 0$ est fini. Cette application α est nulle sur U et passe donc au quotient pour définir l'application $\widetilde{f}$ cherchée. Ainsi $\widetilde{f}$ est l'unique application linéaire vérifiant $\widetilde{f} \circ \pi = \alpha$.

Ainsi, lorsque, suivant la remarque 11, on écrit

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j i(\mathrm{A}_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \pi(\delta_{\mathrm{A}_j}) = \pi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j\right) \in \widehat{\mathrm{E}}$$

on obtient
$$\widetilde{f}(x) = \widetilde{f} \circ \pi\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j\right) = \alpha\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\mathrm{A}_j)\,.$$

Finalement, on obtient pour $\widetilde{f}$, l'expression

$$\widetilde{f}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(\mathrm{A}_j)\,. \qquad (\mathbf{1})$$

Du fait que $\widetilde{f}$ est obtenue par passage au quotient, l'expression (**1**) a bien un sens bien que l'écriture de x sous la forme $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j$ ne soit pas unique. ■

Exemple 13 – La forme linéaire λ. Étudions la forme linéaire $\lambda : \widehat{\mathrm{E}} \to k$. Elle est obtenue grâce à la propriété universelle appliquée à l'application constante (donc affine) 1. Ainsi, d'après (**1**), on a

$$\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \lambda(\mathrm{A}_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,.$$

Utilisons cette expression pour montrer que tout élément de $\widetilde{\mathrm{E}}$ qui n'est pas dans E peut s'écrire sous la forme $\lambda\mathrm{G}$ avec $\lambda \in k^\times$ et $\mathrm{G} \in \mathscr{E}$: autrement dit, tout élément de $\widetilde{\mathrm{E}}$ qui n'est pas dans E est colinéaire à un élément de $\mathscr{E}$. Considérons, pour cela, $x \in \widehat{\mathrm{E}} \smallsetminus \mathrm{E}$. On écrit, suivant la remarque 11,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{A}_j\,.$$

On a alors
$$\lambda(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0$$

car $x \notin \mathrm{E} = \lambda^{-1}(0)$. Ainsi, on peut écrire $x = \lambda(x)\mathrm{G}$ où G est le barycentre de la famille $(\mathrm{A}_j, \lambda_j)$ (qui existe bien puisque $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \neq 0$).

Cela se voit aussi immédiatement sur le dessin de la remarque 10 : toute droite (vectorielle) qui n'est pas contenue dans E rencontre $\mathscr{E}$. ■

4) Enveloppe vectorielle et propriété universelle.

Dans cette sous-partie, on étudie les conséquences abstraites de la propriété universelle de $\widehat{\mathrm{E}}$. Ces propriétés sont très similaires à celles vues dans la première partie pour l'espace des combinaisons linéaires formelles.

Remarque 14 – Retour sur la propriété universelle de $\widehat{\mathbf{E}}$. De façon informelle, la propriété universelle s'énonce par : lorsqu'on dispose d'une application **affine** issue de $\mathscr{E}$ et à valeurs dans un **espace vectoriel**, on peut la prolonger en une application linéaire. De façon précise, pour tout espace vectoriel F, l'application

$$\begin{cases} \mathscr{L}(\widehat{\mathrm{E}}, \mathrm{F}) & \longrightarrow \mathscr{A}(\mathscr{E}, \mathrm{F}) \\ \varphi & \longmapsto \varphi \circ i \end{cases}$$

est une bijection. Enfin, l'heuristique de la propriété universelle se résume ainsi : « une application affine à valeurs dans un espace vectoriel, c'est la même chose qu'une application linéaire qui part de l'enveloppe vectorielle. » On pourra comparer ce paragraphe au dernier de l'application 2. ∎

Le corollaire suivant examine les conséquences formelles de la propriété universelle. Il est à rapprocher de l'application 5 et de l'exercice 2. Il s'agit en fait de propriétés systématiques des objets vérifiant une propriété universelle (pour les savants, ce qui est caché derrière est la représentabilité des foncteurs).

Corollaire 15 – Unicité et fonctorialité. Étant donné un espace affine $\mathscr{E}$, le couple $(\widehat{\mathrm{E}}, i)$ est unique à unique isomorphisme près. De façon précise, si (F, j) est un couple formé d'un espace vectoriel et d'une application affine $j : \mathscr{E} \to \mathrm{F}$, vérifiant pour tout espace vectoriel F' et toute application affine $f : \mathscr{E} \to \mathrm{F}'$, il existe une unique application linéaire $\widetilde{f} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}'$ telle que $\widetilde{f} \circ j = f$, alors il existe un unique isomorphisme linéaire $\alpha : \widehat{\mathrm{E}} \to \mathrm{F}$ tel que $\alpha \circ i = j$ (comparer à la question **d** de l'exercice 2).

Soient $(\mathscr{E}, \mathrm{E})$ et $(\mathscr{F}, \mathrm{F})$ deux espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. On note $i_{\mathrm{E}} : \mathscr{E} \to \widehat{\mathrm{E}}$ et $i_{\mathrm{F}} : \mathscr{F} \to \widehat{\mathrm{F}}$ les inclusions canoniques. Il existe une unique application linéaire $\widehat{f} : \widehat{\mathrm{E}} \to \widehat{\mathrm{F}}$ telle que $i_{\mathrm{F}} \circ f = \widehat{f} \circ i_{\mathrm{E}}$ c'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} & \xrightarrow{f} & \mathscr{F} \\ \downarrow{\scriptstyle i_{\mathrm{E}}} & & \downarrow{\scriptstyle i_{\mathrm{F}}} \\ \widehat{\mathrm{E}} & \overset{\widehat{f}}{\dashrightarrow} & \widehat{\mathrm{F}} \end{array}$$

(comparer à l'application 5).

De plus, si $(\mathscr{F}', \mathrm{F}')$ est un espace affine et $f' : \mathscr{F} \to \mathscr{F}'$ une application affine, on a $\widehat{f' \circ f} = \widehat{f}' \circ \widehat{f}$. Enfin $\widehat{\mathrm{id}_{\mathscr{E}}} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{E}}}$ (comparer aux questions **a** et **b** de l'exercice 2).

Preuve. Il s'agit de raisonnements classiques lors de l'étude d'objets universels. L'application j est affine et à valeurs dans un espace vectoriel, on peut donc écrire $j = \alpha \circ i$ avec α linéaire. De même, comme i est affine, on peut écrire $i = \beta \circ j$. On a donc $j = \alpha\beta j$ et $i = \beta\alpha i$. Comme j est affine, il existe une unique application linéaire $\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ telle que $\varphi \circ j = j$. Or l'application id_{F} convient. Donc par unicité, $\varphi = \mathrm{id}_{\mathrm{F}} = \alpha\beta$. De même, $\beta\alpha = \mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{E}}}$ puisque β est affine (on voit ici qu'on ne se sert absolument pas de la forme de α, ni du fait que $\mathscr{E}$ soit un hyperplan de $\widehat{\mathrm{E}}$).

L'application $i_{\mathrm{F}} \circ f$ est affine (composée d'applications affines) et à valeurs dans l'espace vectoriel $\widehat{\mathrm{F}}$. On en déduit la factorisation souhaitée. Comme dans l'application 5, l'égalité $i_{\mathrm{F}} \circ f = \widehat{f} \circ i_{\mathrm{E}}$ s'interprète, lorsqu'on identifie $\mathscr{E}$ à $i_{\mathrm{E}}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{F}$ à $i_{\mathrm{F}}(\mathscr{F})$, en un prolongement de f. En effet, on a construit une application linéaire de $\widehat{\mathrm{E}}$ dans $\widehat{\mathrm{F}}$ telle que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{E}$, on ait $f(\mathrm{A}) = \widehat{f}(\mathrm{A})$ c'est-à-dire que la restriction de $\widehat{f}$ à $\mathscr{E}$ est f.

Par ailleurs, par construction, on a

$$i_{\mathrm{F}'} \circ f' \circ f = \widehat{f}' \circ i_{\mathrm{F}} \circ f = \widehat{f}' \circ \widehat{f} \circ i_{\mathrm{E}}$$

ce qui donne l'égalité souhaitée par unicité. Enfin, on a $i_{\mathrm{E}} = i_{\mathrm{E}} \circ \mathrm{id}_{\mathscr{E}} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathrm{E}}} \circ i_{\mathrm{E}}$ et on a l'égalité souhaitée par unicité. ∎

Exercice 4 – Encore quelques conséquences de la propriété universelle.

a) Dans le corollaire 15, on a montré qu'un couple (F, j) vérifiant la propriété universelle est unique à unique isomorphisme près. Cette question montre qu'on peut construire très facilement de tels couples. Elle est à rapprocher de la question **a** de l'exercice 5.4 de [BPM] et à la question **e** de l'exercice 2. Soient F un espace vectoriel et $f : \widehat{\mathrm{E}} \to \mathrm{F}$ un isomorphisme linéaire. Montrer que le couple $(\mathrm{F}, f \circ i)$ vérifie la propriété universelle et que l'application α du corollaire 15 est en fait f.

b) Toujours avec les notations du corollaire 15, montrer que $\widehat{f}$ est injective (resp. surjective, bijective) si et seulement si f l'est (on pourra commencer par démontrer que, si $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est une application affine injective (resp. surjective) alors il existe une application affine $g : \mathscr{F} \to \mathscr{E}$ telle que $gf = \mathrm{id}_{\mathscr{E}}$ (resp. $fg = \mathrm{id}_{\mathscr{F}}$) ; une autre méthode pour démontrer la surjectivité consiste à remarquer que $\mathscr{F}$ engendre l'espace vectoriel $\widehat{\mathrm{F}}$). Remarquer la similarité de cette question avec la question **c** de l'exercice 2.

c) Vérifier que si (F, j) est un couple vérifiant la propriété universelle alors j est injective et $j(\mathscr{E})$ est un hyperplan affine de F qui n'est pas un hyperplan vectoriel.

d) *Caractérisation intrinsèque de l'enveloppe vectorielle.* Soient $\mathscr{E}$ un espace affine et F un espace vectoriel ayant un hyperplan affine et pas vectoriel qui est isomorphe (en tant qu'espace affine) à $\mathscr{E}$. Déterminer j pour que F vérifie la propriété universelle (comparer à la question **f** de l'exercice 2). En particulier, soient F un espace

vectoriel et H un hyperplan affine de F ne passant pas par 0. Vérifier que F est une enveloppe vectorielle pour H (on se servira de ceci dans l'exercice 9 question **g** de la feuille de géométrie projective).

Remarque 16 — Données supplémentaires. Comme pour la construction de l'ensemble des combinaisons linéaires formelles (voir la remarque 6), la construction explicite de l'enveloppe vectorielle d'un espace affine fournit quelques propriétés supplémentaires. Dans notre cas, on obtient l'injectivité de i (et donc l'identification de $\mathscr{E}$ à un sous-espace affine de $\widehat{\mathrm{E}}$) et le fait que $i(\mathscr{E})$ est un hyperplan affine de $\widehat{\mathrm{E}}$. ■

Remarque 17 — Où on ne doit pas être étonné que $i(\mathscr{E})$ est un hyperplan. Heuristiquement, pour obtenir l'unicité de l'application $\widetilde{f}$, il faut que $i(\mathscr{E})$ engendre l'espace vectoriel $\widehat{\mathrm{E}}$. Or les seuls sous-espaces affines d'un espace vectoriel qui engendrent l'espace vectoriel en entier sont les hyperplans affines non vectoriels et l'espace tout entier. Si $i(\mathscr{E})$ était l'espace tout entier alors on obtiendrait une structure vectorielle canonique sur $\mathscr{E}$ et on a déjà vu que ce serait très étonnant.

Par ailleurs, si i n'était pas injective, cela imposerait des relations supplémentaires : si $i(\mathrm{A}) = i(\mathrm{B})$ avec $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ alors l'image du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ devrait être nulle dans tout espace vectoriel dans lequel $\mathscr{E}$ s'envoie de façon affine. On a vu, en choisissant $\mathscr{E}_{\mathrm{A}}$, dans la preuve de la proposition 9 que ce n'était pas le cas. ■

III Éclairage de la géométrie affine à la lumière de l'enveloppe vectorielle.

Les exercices qui suivent proposent un retour sur les notions classiques de la géométrie affine sous l'œil de l'enveloppe vectorielle. On commence par les applications affines puis l'expression des applications affines sous forme de matrices à l'aide des différents types de repères (cartésien ou affine). Dans l'exercice 7, on étudie les sous-espaces affines. Enfin, on termine en étudiant la notion d'équation barycentrique.

Exercice 5 — Enveloppe vectorielle et applications affines. Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux espaces affines. Montrer que l'ensemble des applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ s'identifie à un sous-ensemble de $\mathscr{L}(\widehat{\mathrm{E}}, \widehat{\mathrm{F}})$ qu'on déterminera (en fonction de $\lambda_{\mathscr{E}}$ et $\lambda_{\mathscr{F}}$). En particulier, cela montre que l'application $f \mapsto \widehat{f}$ du corollaire 15 est injective. Retrouver la dimension de l'espace affine des applications affines de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$.

Exercice 6 — Enveloppe vectorielle, repère, base et matrice. Soient $\mathscr{E}, \mathscr{F}$ deux espaces affines et $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine.

a) Interpréter le choix d'un repère cartésien de $\mathscr{E}$ en terme de base de $\widehat{\mathrm{E}}$.

b) Interpréter le choix d'un repère affine (d'une famille affinement libre, d'une famille affinement génératrice) de $\mathscr{E}$ en terme de base (resp. famille libre, famille génératrice) de $\widehat{\mathrm{E}}$. Comment s'interprète alors les coordonnées barycentriques ?

c) On fixe une repère cartésien $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$) de $\mathscr{E}$ (resp. de $\mathscr{F}$) et on identifie $\mathscr{L}(\widehat{\mathrm{E}}, \widehat{\mathrm{F}})$ avec les matrices via le choix de la base de $\widehat{\mathrm{E}}$ (resp. $\widehat{\mathrm{F}}$) associée à $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$). Déterminer la forme de la matrice associée à f, comment calculer l'image d'un point par f en fonction de ses coordonnées dans $\mathscr{R}$?

d) On fixe une repère affine $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$) de $\mathscr{E}$ (resp. de $\mathscr{F}$) et on identifie $\mathscr{L}(\widehat{\mathrm{E}}, \widehat{\mathrm{F}})$ avec les matrices via le choix de la base de $\widehat{\mathrm{E}}$ (resp. $\widehat{\mathrm{F}}$) associée à $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$). Déterminer la forme de la matrice associée à f, comment calculer l'image d'un point par f en fonction de ses coordonnées dans $\mathscr{R}$?

e) On fixe une repère affine $\mathscr{R}$ (resp. un repère cartésien $\mathscr{R}'$) de $\mathscr{E}$ (resp. de $\mathscr{F}$) et on identifie $\mathscr{L}(\widehat{\mathrm{E}}, \widehat{\mathrm{F}})$ avec les matrices via le choix de la base de $\widehat{\mathrm{E}}$ (resp. $\widehat{\mathrm{F}}$) associée à $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$). Déterminer la forme de la matrice associée à f, comment calculer l'image d'un point par f en fonction de ses coordonnées dans $\mathscr{R}$?

f) On fixe une repère cartésien $\mathscr{R}$ (resp. un repère affine $\mathscr{R}'$) de $\mathscr{E}$ (resp. de $\mathscr{F}$) et on identifie $\mathscr{L}(\widehat{\mathrm{E}}, \widehat{\mathrm{F}})$ avec les matrices via le choix de la base de $\widehat{\mathrm{E}}$ (resp. $\widehat{\mathrm{F}}$) associée à $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}'$). Déterminer la forme de la matrice associée à f, comment calculer l'image d'un point par f en fonction de ses coordonnées dans $\mathscr{R}$?

Exercice 7 — Enveloppe vectorielle et sous-espace affine. Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de direction E et $\widehat{\mathrm{E}}$ son enveloppe vectorielle. On note $\mathrm{Aff}_{\mathscr{E}}$ l'ensemble des sous-espaces affines de $\mathscr{E}$ et $\mathrm{Vect}_{\widehat{\mathrm{E}},\mathrm{E}}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\widehat{\mathrm{E}}$ **non contenus** dans E.

Montrer que les applications suivantes sont des bijections réciproques l'une de l'autre

$$\begin{cases} \mathrm{Aff}_{\mathscr{E}} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{\widehat{\mathrm{E}},\mathrm{E}} \\ \mathscr{F} \longmapsto \mathrm{vect}\,\mathscr{F} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathrm{Vect}_{\widehat{\mathrm{E}},\mathrm{E}} \longrightarrow \mathrm{Aff}_{\mathscr{E}} \\ \mathrm{F} \longmapsto \mathrm{F} \cap \mathscr{E}\,. \end{cases}$$

Déterminer le lien entre la dimension d'un sous-espace affine et la dimension du sous-espace vectoriel de $\widehat{\mathrm{E}}$ qui lui est associé. Finalement, il revient au même de se donner un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ et un sous-espace vectoriel

de $\widehat{\mathrm{E}}$ non contenu dans E. En particulier, il revient au même de se donner une droite de $\mathscr{E}$ ou un plan vectoriel de $\widehat{\mathrm{E}}$ non contenu dans E.

Exercice 8 — Équation barycentrique d'une droite. [EID, Chapitre 1] [TIS, Thème 1.1] On suppose que $\mathscr{E}$ est de dimension 2. On choisit ABC un repère affine de $\mathscr{E}$ c'est-à-dire un vrai triangle. Ainsi $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ est une base de $\widehat{\mathrm{E}}$: tout élément de $\widehat{\mathrm{E}}$ se décompose de façon unique $x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C}$ avec $x, y, z \in k$. Un point de $\mathscr{E}$ est alors repéré par ses coordonnées barycentriques : $\mathrm{G} = x\mathrm{A} + y\mathrm{B} + z\mathrm{C} \in \mathscr{E}$ si et seulement si $x + y + z = 1$ et dans ce cas, x, y, z sont les coordonnées barycentriques de G dans le repère affine ABC c'est-à-dire que G est le barycentre de $(\mathrm{A}, x), (\mathrm{B}, y)$ et (C, z).

a) Soit $u, v, w \in k$. À quelle condition l'ensemble des (x, y, z) tel que $x+y+z = 1$ et $ux+vy+wz = 0$ représente une droite de $\mathscr{E}$. On pourra utiliser l'exercice précédent ou montrer que l'application

$$(x, y, z) \text{ tel que } x + y + z = 1 \longmapsto ux + vy + wz$$

est affine (ou même faire les 2 méthodes pour mieux comprendre !). Lorsqu'il s'agit d'une droite, déterminer un vecteur directeur de la droite (en fonction de u, v, w). On dit que l'équation $ux+vy+wz = 0$ est l'*équation barycentrique*. Si on ne l'a pas encore fait, faire le lien avec l'exercice précédent : $ux+vy+wz = 0$ est l'équation d'un plan de $\widehat{\mathrm{E}}$.

b) Soit M (resp. M′) de coordonnées barycentriques (d, e, f) (resp. (d', e', f')). Déterminer l'équation barycentrique de la droite (MN).

c) Déterminer l'équation barycentrique des hauteurs, des médiatrices, des bissectrices et des médianes de ABC puis retrouver les résultats de l'exercice 14 (remarquez l'avantage de la symétrie ce qui n'est évidemment pas le cas, lorsqu'on se place par exemple dans le repère cartésien $(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$). Pour les médiatrices et les hauteurs, on pourra les écrire comme ligne de niveau d'une fonction de Leibniz mais ce n'est pas obligé.

Références

[BER] M. Berger. *Géométrie*. Cedic Nathan, 1977.

[BPM] V. Beck, J. Malick, et G.Peyré. *Objectif Agrégation*. H & K, 2004.

[EID] J.-D. Eiden. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, 2009.

[FRE] J. Frenkel. *Géométrie pour l'élève-professeur*. Hermann, 1973.

[TIS] C. Tisseron. *Géométrie affine, projective et euclidienne*. Hermann, 2000.